

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»**

Физико-математический факультет



Р.А. Бостанов

«04» июля 2023 г.

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА С ТОЧКИ  
ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Методические рекомендации по изучению дисциплины,  
решению задач, задачи для самостоятельного решения

Карачаевск, 2023

Рекомендовано учебно-методической комиссией физико-математического

факультета КЧГУ имени У.Д. Алиева

*Булатова Э.М. Элементарная математика с точки зрения высшего математики*  
Учебно- методические рекомендации. Карачаевск: изд-во КЧГУ, 2023. – с.52

**Рецензент:** *Гербеков Х.А.* канд. пед. наук, доцент

В методических рекомендациях изложены теоретические и практические основы решения уравнений, неравенств и их систем. Основные положения в рекомендациях дополнены примерами с решениями и задачами для самостоятельной работы.

Предназначается для преподавателей, студентов, учителей и старшеклассников, специализирующихся по математике.

© Карачаево-Черкесский государственный университет, 2023

## ВВЕДЕНИЕ

В методических рекомендациях рассматриваются различные алгебраические уравнения и неравенства, а также их систем. Обращается внимание на теоремы, позволяющие перейти от данного уравнения (неравенства) к другому, не нарушая равносильности.

Дается классификация уравнений. В данных методических рекомендациях приводятся разнообразные алгебраические уравнения, неравенства, а также их системы. Особо выделены уравнения и неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Обращено внимание на методику их решения.

Среди алгебраических уравнений и неравенств важную роль играют иррациональные уравнения и неравенства. Как показывает опыт, решение такого вида уравнений и неравенств вызывает у многих затруднение. В работе акцентируется внимание на способах их решения, обращается внимание на отыскание более рациональных приемов их решения. В каждом параграфе рассматриваются задачи повышенной трудности.

Для закрепления материала предлагаются упражнения и задачи для самостоятельной работы.

Как показывает многолетний опыт преподавания, у учащихся и студентов вызывает затруднение решение уравнений и неравенств, содержащих параметры. В методических рекомендациях этому вопросу уделено особое внимание. Предлагаются также задачи, решение которых приводит к составлению уравнений, неравенств и их систем. Такие примеры имеются почти во всех параграфах.

Упражнения, предложенные для самостоятельного решения, снабжены указаниями или ответами.

## § 1. Определение уравнения, его решения, теоремы о равносильности уравнений

Если даны две функции  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$  и требуется найти значение аргумента, при которых функции принимают равные значения, то пишут  $f(x) = \varphi(x)$  и это условное равенство называют уравнением.

Областью определения уравнения называют пересечение областей определения функций  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$ . Иногда говорят и так: область допустимых значений неизвестного (переменной). Если при  $x=a$   $f(a) = \varphi(a)$ , то число  $a$  называют корнем уравнение  $f(x) = \varphi(x)$ .

Решением уравнения называют множество всех его корней. Это множество может быть конечное (в частности, пустое) и бесконечное.

**Пример.**  $x(x-1)(x-5)=0$  - это уравнение имеет конечное множество решений  $\{0; 1; 5\}$ . Уравнение  $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$  имеет бесконечное множество решений. Уравнение  $x^2 + 5 = 0$  не имеет решений в области действительных чисел.

**Замечание.** Иногда на область определения уравнения накладываются дополнительные ограничения. Например, находят только натуральные корни или только рациональные или как в предыдущем примере, действительные (оказалось пустое множество).

Геометрический смысл уравнения и его решения.

Данному уравнению соответствуют графики двух функций  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$ , а его корням соответствуют абсциссы общих точек этих графиков.

### Классификация уравнений.

Функцию, заданную в явном виде, называют алгебраической, если над аргументами не выполняются иные действия, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с целым показателем, извлечения корня с натуральным показателем, причем число этих операций - конечное число.

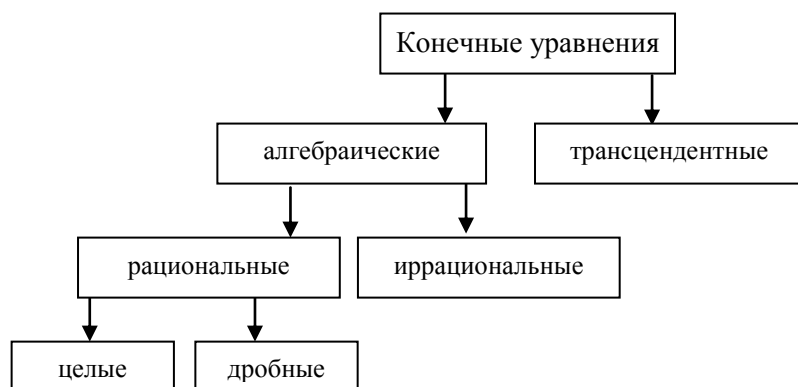
В зависимости от вида функций различают уравнения алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Уравнение называют алгебраическим, если обе функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  являются алгебраическими. Если хотя бы одна из них трансцендентна, то уравнение называют трансцендентным.

Примеры:

1)  $\frac{x}{x^2-1} \sin 3 = \lg 2$  - алгебраические уравнения;

2)  $x^{\sqrt{2}} = x$  - неалгебраические уравнения.



### Теоремы о равносильности уравнений.

**Определение.** Два уравнения называются равносильными, если они, имеют одно и то же множество решений.

**Замечание.** Два уравнения могут быть равносильными в одной области и неравносильными в другой.

**Пример.** Уравнения  $x-1=0$  и  $(x-1)(x^2+1)=0$  равносильны во множестве действительных чисел и не являются равносильными во множестве комплексных чисел.

**Теорема 1.** Если к обеим частям уравнения  $f(x) = \varphi(x)$  прибавить функцию  $g(x)$ , не изменяющую область определения уравнения, то получится новое уравнение  $f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$  равносильное данному.

**Пример.**

$$x - \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1} \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$x = 1 \quad (2)$$

Область определения уравнения (1) - все множество действительных чисел, кроме  $x=1$ , область определения уравнения (2) -любое число.

Заметим, что уравнения (1) и (2) не являются равносильными, т.к. не выполнено условие теоремы 1.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения  $f(x) = \varphi(x)$  умножить на функцию  $g(x)$ , не изменяющую области определения данного уравнения и не обращающуюся в нуль, то получится новое уравнение  $f(x)g(x) = \varphi(x)g(x)$  равносильное данному.

**Пример.**

$$2x+1=x \quad (1)$$

$$g(x)=x-2$$

$$(2x+1)(x-2)=x(x-2) \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) являются неравносильными, т.к. функция  $g(x)=x-2$  обращается в нуль в области определения уравнения(1).

В то же время уравнение (1) равносильно уравнению  $(2x+1)(x^2+1)=x(x^2+1)$  в области действительных чисел.

## §2. Целые алгебраические уравнения.

Общий вид уравнения  $n$  - степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

В школьном курсе алгебры изучаются уравнения первой и второй степени, в курсе "Алгебра и теория чисел" студенты подробно знакомятся с решением уравнений третьей и четвертой степени.

В прошлом веке учеными Абелем и Галуа было доказано, что при  $n > 4$  уравнения в общем виде в радикалах неразрешимы. Естественно выделить такие уравнения высших степеней, которые в радикалах разрешимы.

а) Двучленные уравнения:  $ax^n+b=0$

б) Трехчленные уравнения:  $ax^{2n}+bx^n+c=0$

в) Некоторые виды возвратных уравнений:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+cx^2+bx+a=0$$
 -возвратное уравнение I рода

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - cx^2 - bx - a = 0$  - косооборотное уравнение;

$ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + \dots + cx^2 - bx + a = 0$  - обратное уравнение II рода.

При решении таких уравнений используют теоремы.

**Теорема 1.** Обратное уравнение I рода нечетной степени имеет корень  $x = -1$ , причем после деления многочлена, стоящего в левой части уравнения на  $(x+1)$  получается снова обратное уравнение.

**Теорема 2.** Всякое, косооборотное уравнение имеет корень  $x = -1$ , после деления уравнения на  $(x-1)$  получается снова обратное уравнение.

**Теорема 3.** Обратное уравнение II рода, степень которого не кратка 4, имеет корни  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -i$ , причем после деления его на  $(x^2 + 1)$  получается снова обратное уравнение II рода степени, кратной 4.

**Теорема 4.** (О понижении степени обратных уравнений).

Если обратное уравнение имеет четную степень, то степень уравнения можно понизить в два раза, причем для обратных уравнений I рода и косооборотных осуществляется с помощью подстановки  $y = x + \frac{1}{x}$ , а для обратных уравнений II рода с помощью подстановки  $y = x - \frac{1}{x}$ .

### Упражнения.

1. Решить уравнение:

$$6x^5 - 17x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 17x + 6 = 0.$$

Данное уравнение является обратным I рода нечетной степени, имеет корень  $x = -1$ .

1. Разделив уравнение на  $x + 1$ , получим уравнение

$6x^4 - 23x^3 + 32x^2 - 23x + 6 = 0$ . Осуществляем подстановку  $x + \frac{1}{x} = y$ , разделив предварительно на  $x^2$ .

$$6x^2 - 23x + 32 - \frac{23}{x} + \frac{6}{x^2} = 0, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Таким образом, относительно  $y$  получим уравнение второй степени;

$$6y^2 - 23y + 20 = 0.$$

После этого находим  $x$ , пользуясь подстановкой.

Ответ:  $\left\{1; 2; 0,5; \frac{2-i\sqrt{3}}{3}; \frac{2+i\sqrt{3}}{3}\right\}$ .

2.  $x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$ .

3.  $x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$

**Указание.** Для решения этих уравнений воспользуйтесь теоремами 2 и 3, и затем теоремой 4.

### §3. Дробные алгебраические уравнения

Всякое дробное рациональное уравнение путем тождественных преобразований можно представить в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ , где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены.

**Теорема 1.** Уравнение  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  равносильно системе  $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$ .

**Следствие.** Если  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - несократимая дробь, то уравнение  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  равносильно уравнению  $P(x) = 0$ .

**Теорема 2.** Если дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  сократима на  $d(x) = \text{НОД}(P(x), Q(x))$ , то получится новое уравнение  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ , которое будет следствием данного уравнения, не всегда будет равносильно данному.

**Пример.** Решить уравнение:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1}.$$

После тождественных преобразований получим  $\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = 0$ .

Исходное уравнение не будет равносильно уравнению  $\frac{x-1}{x+2} = 0$ , так как область определения данного уравнения - все множество чисел, кроме  $x=1$  и  $x=-2$ . После тождественных преобразований получено уравнение, область определения которого  $x \neq -2$ .

Решением второго уравнения является  $x=1$ , что не является, однако, решением исходного уравнения.



### Об уравнениях, содержащих параметр.

Решить уравнение, содержащее параметры - это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения.

#### Пример 1.

Решить уравнение:  $x = 4x^2 + 8ax^2 + 4a^2x^2$   
 $4x(1 + 2a + a^2) = 1.$

Получаем, что  $x = 0$  при любом  $a$ , при  $a \neq -1$   $x = \frac{1}{4(a+1)^2}$ , при  $a = -1$  решение уравнения  $x = 0$ .

#### Пример 2.

$$x^3 + 2x^2(1-b) + x(1-a) = 0.$$

$x_1 = 0$  при любых  $a$  и  $b$ .

$$x^2 + 2x(1-b) + (1-a) = 0 \dots (*)$$

$$x_{2,3} = b - 1 \mp \sqrt{b^2 - 2b + a}, \quad b^2 - 2b + a \geq 0.$$

Решение квадратного неравенства в области действительных чисел зависит от знака дискриминанта и первого коэффициента.

Если  $1 - a \leq 0$ , т.е.  $a \geq 1$ , то неравенство  $b^2 - 2b + a \geq 0$ , выполняется при любых значениях  $b$ . Следовательно, при  $a \geq 1$  и любом  $b$  уравнение (\*) имеет решением  $x_{2,3}$ .

Если  $a < 1$ , то решение неравенства при  $b < 1 - \sqrt{1 - a}$  и  $b > 1 + \sqrt{1 - a}$ .

Итак, при  $a < 1$  и  $b < 1 - \sqrt{1 - a}$  или  $a < 1$  и  $b > 1 + \sqrt{1 - a}$  решением уравнения (\*) будут также  $x_{2,3}$ .

#### Пример 3.

$$\frac{x}{n-1} + 1 = 0.$$

Ответ:  $x = 1 - n$  при  $n \neq 1$ , при  $n = 1$  уравнение не имеет решений.

#### §4. Алгебраические нетождественные неравенства

**Определение.** Если даны две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  и требуется найти значение аргумента  $x$ , при котором  $f(x) > \varphi(x)$  или  $f(x) < \varphi(x)$ , то говорят, что дано неравенство, требующее решения.

Решением данного неравенства называют множество значений аргумента, удовлетворяющих неравенству.

Как и уравнение, неравенство рассматривается на общей части областей определения функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .

При решении неравенств используются теоремы, аналогичные теоремам, которые дают возможность перейти от одного уравнения к другому, равносильному.

Системой неравенств называется совокупность двух или нескольких неравенств, рассматриваемых над одним и тем же числовым множеством. Решением системы называют пересечение решений всех ее неравенств.

**Пример.** Решить систему

$$\begin{cases} 3ax - 5 > 6 - ax & (1) \\ (a + 1)x - 8 > (1 - 2a)x & (2) \end{cases}$$

Неравенство (1) после преобразований приводится к виду  $4ax > 11$ , откуда

$$x > \frac{11}{4a} \quad \text{при } a > 0$$

$$x < \frac{11}{4a} \quad \text{при } a < 0$$

нет решения при  $a = 0$ .

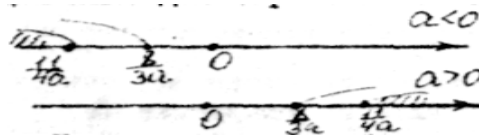
Неравенство (2) приводится к виду  $3ax > 8$ , откуда

$$x > \frac{8}{3a} \quad \text{при } a > 0$$

$$x < \frac{8}{3a} \quad \text{при } a < 0$$

нет решения при  $a = 0$ .

Для нахождения решения системы воспользуемся числовой прямой:



Ответ: при  $a < 0$   $x \in (-\infty; \frac{11}{4a})$

при  $a > 0$   $x \in (\frac{11}{4a}; +\infty)$

при  $a = 0$  нет решения.

Неравенство второй степени имеет общий вид  $ax^2 + bx + c > 0$ , где  $a \neq 0$ .

Решение основано на теореме о знаке квадратного трехчлена. Если дискриминант  $D$  функции  $y = ax^2 + bx + c$  меньше нуля, то знак функции совпадает со знаком ее первого коэффициента при всех значениях  $x$ . Если  $D = 0$ , то знак функции совпадает со знаком  $a$  при всех значениях  $x$ , кроме значений, равных кратному корню. Если  $D > 0$ , то знак квадратного трехчлена совпадает со знаком  $a$  вне отрезка  $(x_1, x_2)$  и противоположен знаку  $a$  внутри этого отрезка. Причем для определенности удобно обозначить меньший корень через  $x_1$ , больший -  $x_2$ .

**Пример 1.** Решить неравенство:

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$D = 4 > 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ . Решением неравенства служит интервал  $(1; 3)$

**Пример 2.**

$$(3k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k-1 > 0.$$

Определим знак первого коэффициента  $a = 3k-1$ :  $0$  при  $k = \frac{1}{3}$ , больше нуля при  $k > \frac{1}{3}$ , меньше нуля при  $k < \frac{1}{3}$ .

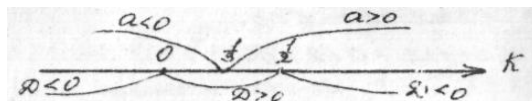
Исследуем дискриминант  $D = 4(-2k^2 + k)$ ,  $D = 0$  при  $k = 0$  или  $k = \frac{1}{2}$ .

$$D > 0 \text{ при } 0 < k < \frac{1}{2}$$

$$D < 0 \text{ при } k < 0 \text{ или } k > \frac{1}{2}.$$

Отметки на числовой оси значения параметра  $k$  и соответствующие значения первого

коэффициента и дискриминанта.



Для удобства используем таблицу

$k$	$a$	$D$	Решение $f(x) > 0$
$(-\infty; 0)$	-	-	нет решения
$0$	-	$0$	
$(0; \frac{1}{3})$	-	+	$(x_1; x_2)$
$\frac{1}{3}$	$0$		Имеем неравенство I ст. $x > \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$	+	+	$x < x_1$ или $x > x_2$
$\frac{1}{2}$	+	$0$	$(-\infty; x_{1,2}) \cup (x_{1,2}; +\infty)$
$(\frac{1}{2}; \infty)$	+	-	любое число

Заметим далее, что при  $k < \frac{1}{3}$   $x_1 = \frac{2k-1+\sqrt{D}}{3k-1}$ ,  $x_2 = \frac{2k-1-\sqrt{D}}{3k-1}$

при  $k > \frac{1}{3}$  они меняются ролями.

### Упражнения для самостоятельного решения

- $x^2 - 2(4m+3)x + 15m^2 + 28m + 6 > 0$ .
- $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ .
- $kx^2 + x + 1 > 0$ .
- $x^2 + kx + 1 < 0$ .
- $(m-1)x^2 + 2mx + 9m - 5 < 0$ .
- $ax^2 + (2a+1)x + a + 2 > 0$ .

## §5. Целые алгебраические неравенства выше второй степени.

Общий вид:

$$x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n > 0, \quad n > 2$$

$$(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k} > 0$$

Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком 1 коэффициента, если  $D < 0$ . Такие трехчлены можно опустить, не нарушая равносильности неравенства. Кроме того можно опустить линейные множители в четных степенях.

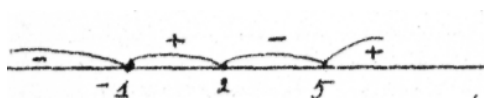
Далее при решении используется метод интервалов.

**Пример.** Решить неравенство:

$$(x^2+x+1)^2(x^2-4x-5)^3(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 > 0$$

Это неравенство равносильно такому:

$$(x-2)(x+1)(x-5) > 0, \text{ причем } x \neq \frac{1}{2}.$$



$$\text{Ответ: } \left(1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (5; +\infty).$$

### §6. Дробные рациональные, неравенства

Общий вид  $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$  или  $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$ - многочлены. Решение основано на том, что такие неравенства равносильны соответственно следующим целым неравенствам:

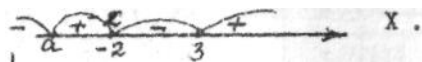
$$P(x)Q(x) > 0 \text{ или } P(x)Q(x) < 0.$$

**Пример.** Решить неравенство:

$$\frac{x^2+(2-a)x-2a}{x-3} > 0, \text{ оно равносильно неравенству:}$$

$(x^2+(2-a)x-2a)(x-3) > 0$  или  $(x+2)(x-a)(x-3) > 0$ , причем параметр  $a$  принимает любые значения.

а)  $a < -2$

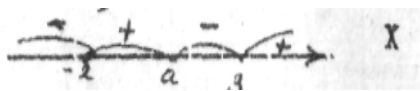


Тогда  $x \in (a; 2) \cup (3; +\infty)$ .

б)  $a = -2$ , неравенство примет вид  $(x + 2)^2(x - 3) > 0$ , следовательно, при

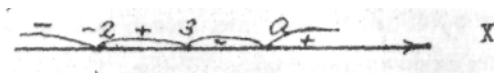
$a = -2 \quad x \in (3; +\infty)$ .

в)  $-2 < a < 3$



$x \in (-2; a)$  или  $x \in (3; +\infty)$ .

г) в таком случае неравенство примет вид  $(x + 2)(x - 3)^2 > 0$ . Следовательно,  $x \in (-2; 3) \cup (3; +\infty)$ .



д)  $a > 3$

$x \in (-2; 3) \cup (a; +\infty)$ .

Следовательно, получено решение для всех значений параметра.

**Пример 2.** Решить неравенство:

$$\frac{p}{x} - \frac{1}{x-1} > 1.$$

Неравенство преобразуется к виду  $\frac{x^2 - px + p}{x(x-1)} < 0$ , которое равносильно  $P = x(x-1)(x^2 - px + p) < 0$ .

Определим знак дискриминанта функции  $f(x) = x^2 - px + p$ .

$$D = p(p-4) \begin{cases} = 0 & \text{при } p = 0 \text{ или } p = 4 \\ < 0 & \text{при } 0 < p < 4 \\ > 0 & \text{при } p < 0 \text{ или } p > 4. \end{cases}$$

1. При  $0 < p < 4$   $f(x) > 0$  при всех  $x$ , поэтому решением данного неравенства служит интервал  $(0; 1)$ .

2. При  $p = 0$   $f(x) = x^2 > 0$  при  $x \neq 0$ .

3. При  $p = -4$   $f(x) = (x-2)^2 > 0$  при  $x \neq 2$ .

Итак, в случаях 2 и 3 неравенство имеет решение  $0 < x < 1$ .

4. При  $p < 0$   $f(x)$  имеет неравные корни противоположными знаками. Меньший отрицательный корень обозначим через  $x_1$ . Сравним эти корни с числами 0 и 1, обращающими в 0 произведение  $x(x-1)$ .  $f(0)=p < 0$ ,  $f(1)=1 > 0$ , следовательно, 1 расположена вне отрезка  $[x_1; x_2]$ . Следовательно,  $x_1 < 0 < x_2 < 1$ . Далее определим знак  $P$  в каждом интервале:

Интервалы	$x$	$x-1$	$f(x)$	$P$	Вывод
$(-\infty; x_1)$	-	-	+	+	Итак, при $p < 0$ неравенство справедливо в интервалах $(x_1; 0)$ или $(x_2; 1)$ .
$(x_1; 0)$	-	-	-	-	
$(0; x_2)$	+	-	-	+	
$(x_2; 1)$	+	-	+	-	
$(1; +\infty)$	+	+	+	+	

5. При  $p > 4$   $f(x)$  имеет два положительных корня  $x_1$  и  $x_2$ , причем хотя бы один из них больше 1, т.к.  $x_1 + x_2 = p > 4$ , а  $f(1)=1$ , поэтому 1 расположена вне отрезка  $[x_1; x_2]$ . Из сказанного вытекает, что  $0 < 1 < x_1 < x_2$ .

Далее аналогично определяем знак  $P$  в каждом интервале и обнаруживаем, что при  $p > 4$  неравенство выполняется в интервалах  $(0; 1)$  или  $(x_1; x_2)$ . Остается записать корни

$f(x)$ :  $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4p}}{2}$  и выяснить, что при всех значениях  $p$  меньший корень будет

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4p}}{2}.$$

### Упражнения.

1. При каких значениях параметра  $a$  оба корня функции  $f(x) = x^2 + (2a-1)x + a^2 - 1$  отрицательны?

2. При каких значениях параметра  $p$  функция  $f(x) = x^2 + 3px + 2p^2 - 1$  принимает отрицательные значения в интервале  $0 < x < 1$ ?

3. Решить неравенство:  $\frac{a}{x-3} + \frac{x}{x+3} > \frac{18}{x^2-9}$ .

$$4. \frac{2}{x} + \frac{3}{a} < \frac{2}{x+3a}.$$

$$5. \frac{ax^2}{x-1} - 2a < a^2 + 1.$$

## §7. Уравнения и неравенства, содержащие переменную

### под знаком модуля

Всякое уравнение и неравенство, содержащее неизвестное под знаком модуля, можно заменить совокупностью двух или нескольких систем уравнений и неравенств без модульных скобок, используя следствие из определения модуля действительного числа. Пример I. Решить уравнение:

$$|x| = 2|x - 4| + x - 2.$$

Уравнение равносильно совокупности трех систем

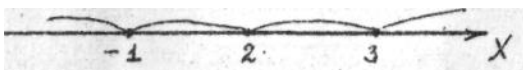
$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x = -2x + 8 + x - 2 \\ \text{нет решения} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 4 \\ x = -2x + 8 + x - 2 \\ x = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 4 \\ x = 2x - 8 + x - 2 \\ x = 5 \end{array} \right.$$

Ответ: {3;5}.

**Пример 2.** Решить неравенство:

$$|x^2 - 2x - 3| + 2|x - 2| < 5.$$

Предварительно находим корни функций, стоящих под знаком модуля. Это числа -1; 2; 3, которые разбивают числовую прямую на 4 интервала.



Данное неравенство равносильно совокупности 4 систем.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x^2 - 2x - 3 - 2x + 4 < 5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x^2 - 4x - 4 < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ 2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Эта система не имеет решений.



$$\text{б) } \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 2x + 3 - 2x + 4 < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x < -\sqrt{2} \text{ или } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Получаем, что  $\sqrt{2} < x < 2$ .

$$\text{в) } \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ -x^2 + 2x + 3 + 2x - 4 < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 4x + 6 > 0 \Rightarrow 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x - 3 + 2x - 4 < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Решение этой системы  $3 \leq x < 2\sqrt{3}$

Ответ:  $x \in (\sqrt{2}; 2) \cup [2; 3) \cup [3; 2\sqrt{3})$  т.е.  $x \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$ .

### Пример 3.

Решить неравенство:  $|2x + a| > \frac{3}{2}a + |x - a|$ .

Это неравенство содержит параметр. Корни функции  $-\frac{a}{2}$  и  $a$ . Следует рассмотреть три случая.

Первый случай  $a > 0$

Тогда  $a > -\frac{a}{2}$

$$\begin{cases} x < -\frac{a}{2} \\ -2x - a > \frac{3}{2}a - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{a}{2} \\ x < -\frac{7}{2}a \end{cases} \Rightarrow x < -\frac{7}{2}a$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq x < a \\ 2x + a > \frac{3}{2}a - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} \leq x < a \\ 3x > \frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} < x < a$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ 2x + a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x > -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq a.$$

при  $a > 0$   $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}a\right) \cup \left(\frac{a}{2}; +\infty\right)$ .

Второй случай  $a < 0$ .

$$\begin{cases} x < a \\ -2x - a > \frac{3}{2}a - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a \\ x < -\frac{7}{2}a \end{cases} \Rightarrow x < a$$

$$\begin{cases} a \leq x < -\frac{a}{2} \\ -2x - a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq x < -\frac{a}{2} \\ x < -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow a \leq x < -\frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{a}{2} \\ 2x + a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{a}{2} \\ x > -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{a}{2}$$

$$a < 0 \quad x \in R \setminus \left\{ -\frac{a}{2} \right\}$$

$$a = 0 \quad |2x| > |x| \Rightarrow x \in R \setminus \{0\}.$$

**Пример 4.** Решить уравнение:

$$\left| x + \frac{n}{x} - n - 1 \right| = (-1)^n \left( x + \frac{n}{x} - n - 1 \right).$$

где  $n$  - целое число.

1) При  $n$  четном  $\left| x + \frac{n}{x} - n - 1 \right| = x + \frac{n}{x} - n - 1$ , что возможно лишь при  $x + \frac{n}{x} - n - 1 \geq 0$  и, следовательно, равносильно неравенству  $x(x-1)(x-n) \geq 0$ .

Последнее выполняется при  $n < 0$  в интервалах  $n \leq x < 0$  и  $1 \leq x < +\infty$ ; при  $n = 0$  в интервале  $1 \leq x < +\infty$ ;

при  $n > 1$  в интервалах  $0 < x \leq 1$  и  $n < x < +\infty$ .

2) При нечетном  $n$  имеем:

$\left| x + \frac{n}{x} - n - 1 \right| = -(x + \frac{n}{x} - n - 1)$ , что возможно при  $x + \frac{n}{x} - n - 1 \leq 0$  и, следовательно, при  $x(x-1)(x-n) \leq 0$ . Используя предыдущие результаты, получаем его решение:

при  $n < 0$   $-\infty < x < n$  или  $0 < x \leq 1$ ;  
 при  $n = 1$   $-\infty < x < 0$ ;  
 при  $n > 1$   $-\infty < x < 0$  или  $1 < x < n$ .

### Упражнения для самостоятельного решения.

1. Построить график функции:

$$y = -x^2 + 3|x|.$$

2. Решить неравенство:

$$|x^2 - 4x + 3| - 2|x + 1| > x^2 - 3x.$$

3. Решить неравенство:

$$\frac{4-x}{x+6} < 3.$$

4. Решить неравенство относительно  $x$ , где  $a$ - параметр:

$$|x - 3a| < |x - a| - 2a.$$

## § 8. Задачи, решаемые с помощью составления уравнений и неравенств

### Задача 1.

Из двух пунктов А и В навстречу друг другу движутся два автомобиля, причем первый выпел раньше второго на 1,5 часа, но проходя в час на 9 км меньше второго. К моменту встречи первый прошел на 30 км больше второго. После встречи автомобили двигались с прежними скоростями и прибыли одновременно первый в пункт А, а второй - в пункт В. Определить расстояние АВ.

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч - скорость 1-го автомобиля, тогда  $(x + 9)$  км/ч - скорость 2-го автомобиля;  $y$  ч - время пребывания в пути 1-го автомобиля до встречи со вторым.

Исходя из того, что до встречи первый автомобиль прошел на 30 км больше, можно составить уравнение:

$$xy - (x + 9)(y - 1,5) = 30. \quad (1)$$

В задаче сказано, что после встречи они находились в пути одинаковое число часов. На основании этого можно составить уравнение:

$$\frac{(x+9)(y-1,5)}{x} = \frac{xy}{x+9} \quad (2);$$

Таким образом, имеем систему из уравнений (1) и (2). Из первого уравнения находим, что  $x = 11 + 6y$ .

Подставляя это значение во второе уравнение, получим;

$$(20 + 6y)^2(y - 1,5) = (11 + 6y)^2y.$$

Решив систему, получим  $x = 36$ ,  $y = \frac{25}{6}$

Далее вычисляем скорость 2-го автомобиля - 45 км/ч, а время пребывания его в пути до встречи с первым - 2 ч. 40 мин. Расстояние между пунктами 270 км.

## Задача 2.

В поселок ежедневно приходят не менее 2 писем и не более 3 телеграмм. За первый месяц года суммарное количество полученных писем было больше, чем количество телеграмм, а за весь год наоборот. Доказать, что в один из дней года эти количества совпадают.

*Решение.*

Пусть  $x$ - число писем в день,  $y$ - число телеграмм в день, причем  $x \geq 2, y < 3$ .

В течение первого месяца года число писем  $P \geq 62$ , число телеграмм  $T \leq 93$ , по условию  $P > T$ , следовательно,  $T < 62$ .

Итак,  $P \geq 62$ ,  $T < 62$ . Значит, ни в один из дней первого месяца количества их не совпадут.

За год писем  $P_1 \geq 2 * 365 = 730$ , т.е.  $P_1 \geq 730$ , число телеграмм  $T_1 \leq 1095$ ,  $T_1 > P_1$ ,  $730 < T_1 \leq 1095$

$\frac{730}{365} < \frac{T_1}{365} \leq \frac{1095}{365}$  следовательно,  $2 < y \leq 3$ .

Итак, в один из дней года будет прислано 3 письма и 3 телеграммы.

### Задача 3.

Парашютист покинул самолет на высоте 5000 м и через 5 мин приземлился в заданном районе. Определить время его снижения до раскрытия парашюта и с раскрытым парашютом, если средняя скорость снижется с раскрытая парашютом 7 м/сек. Сопротивлением воздуха на участке снижения без парашюта пренебречь.

*Решение.*

Пусть  $t$  сек парашютист падал, не пользуясь парашютом: по закону свободного падения он снизился за это время на  $h_1 = \frac{gt^2}{2}$  м. Оставшееся расстояние до земли  $h - h_1$  он прошел со скоростью  $v=7$  м/сек за  $(300-t)$  сек, следовательно,  $h - h_1 = 7(300-t)$

$$\text{т.е. } 5000 - \frac{gt^2}{2} = 2100 - 7t \quad \text{или } 4,9t^2 - 7t - 2900 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем  $t_1 \approx 24, t_2 \approx -23$ .

Отрицательный корень не удовлетворяет условно задачи, поэтому 24 сек. парашютист падал свободно, остальные 276 сек. спускался с парашютов.

### Задача 4.

Катер с экскурсантами должен совершить прогулочный рейс по реке от пункта А до пункта В и обратно не более, чем за 3 часа. Какую собственную техническую скорость должен иметь катер, если скорость течения реки 5 км/ч, расстояние от А до В 28 км и остановка в пункта В делится 40 мин.?

*Решение.*

Пусть собственная скорость катера  $x$  км/ч, тогда по течению катер будет идти со скоростью  $(x+5)$  км/ч, против течения со скоростью  $(x-5)$  км/ч и весь рейс с остановкой в пункте В совершит за время  $t = \frac{28}{x+5} + \frac{28}{x-5} + \frac{2}{3}$  часов. По условию  $t \leq 3$ , следовательно,  $\frac{28}{x+5} + \frac{28}{x-5} + \frac{2}{3} \leq 3$ .

Понятно, что скорость катера больше скорости течения, поэтому числа  $(x+5)$  и  $(x-5)$  положительные, умножая обе части неравенства на  $(x+5)(x-5)$  и выполняя тождественные преобразования, получим равносильное неравенство  $x^2 - 24x - 25 \geq 0$ .

Функция  $y = x^2 - 24x - 25$  имеет корни  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 25$ , поэтому неравенство будет выполняться при  $x \leq -1$  или  $x \geq 25$ . Следовательно, собственная скорость катера должна быть не менее 25 км/ч.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Мастер и его ученик должны были выполнить работу к определенному сроку. Однако, когда была выполнена половина работы, ученик заболел, и мастер, оставшись один, закончил работу с опозданием на 2 дня. За сколько дней мог бы выполнить работу каждый из них, работая один, если мастеру на это потребовалось бы на 5 дней меньше, чем ученику?

Ответ: 10 ч; 15 ч.

2. Из двух городов, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два автомобиля. Один из автомобилей приезжает в В через 20 мин после встречи, а другой в А через 45 мин после встречи. Найти скорость каждого автомобиля.

Ответ. 50 км/ч, 40 км/ч.

3. В равносторонний треугольник со стороной  $a$  надо вписать прямоугольник наибольшей площади. Какими должны быть стороны этого прямоугольника?

Ответ.  $\frac{a}{2}$ ;  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

4. Доказать, что правильный шестиугольник имеет большую площадь, чем квадрат с тем же периметром.

5. С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый пассажир первую половину времени шел со скоростью  $a$  км/ч, а вторую половину времени со скоростью  $b$  км/ч. Второй пассажир первую половину пути шел со скоростью  $b$  км/ч, а вторую - со скоростью  $a$  км/ч. Который из пассажиров пришел раньше к месту назначения?

Ответ. Первый.

## §9. Система и совокупности уравнений и неравенств

В математике различают понятия - системы и совокупности уравнений. Система

уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}$$

Совокупность уравнение:

$$\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}$$

Решением системы уравнений называют множество допустимых наборов значений неизвестных  $(x_0, y_0, \dots, z_0)$  при условии, что любой такой набор удовлетворяет всем уравнениям системы.

Решением совокупности уравнений называют множество наборов значений неизвестных  $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ , любой из которых удовлетворяет хотя бы одному из уравнений совокупности.

Областью определения системы является пересечение областей определения всех уравнений системы.

**Определение.** Две системы уравнений (две совокупности) называют равносильными, если имеют одно и то же множество решений.

**Определение.** Если даны две системы (совокупности) уравнений и известно, что всякое решение первой системы (совокупности) является также решением второй системы (совокупности), то говорят, что вторая система (совокупность) является следствием первой.

**Пример.**

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 3x + 2 = 0 \\ (x + y - 1)(2x - y + 3) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) будет следствием системы (1).

Если в данной системе заменить одно или несколько уравнений равносильными уравнениями, то получится система, равносильная данной.

Если какое-нибудь уравнение в данной системе является следствием других уравнений системы, то его можно отбросить и полученная система будет равносильна данной.

Можно также присоединить к данной системе новое уравнение, являющееся следствием других уравнений системы.

### Основные приемы и методы решения систем.

*Метод линейного преобразования системы.*

Пусть дана система уравнений и некоторое множество чисел:

$$\begin{cases} f_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ f_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_k(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

и получена система (2):

$$\begin{cases} m_{11}f_1 + m_{12}f_2 + \dots + m_{1n}f_n = 0 \\ m_{21}f_1 + m_{22}f_2 + \dots + m_{2n}f_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_{n1}f_1 + m_{n2}f_2 + \dots + m_{nn}f_n = 0 \end{cases}$$

Переход от системы, данной к системе (2) называют линейным преобразованием системы. Причем соответствующей теоремой устанавливается, что система (2) равносильна данной системе, если определитель

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

*Метод подстановки.*



**Теорема.** Если дана система уравнений 
$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ f_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

и если одно из неизвестных в явном виде выразить в каком-нибудь уравнении через другие неизвестные и подставить в остальные уравнения системы, то получим систему (2), равносильную системе (1):

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ f_2(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ f_3(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \end{cases}$$

Переход от системы уравнений к совокупности нескольких систем уравнений основан на следующей теореме.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) \dots f_k(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Функции  $f_1, f_2, \dots, f_k$  определены на некотором множестве. Данная система равносильна совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ g_1(x, y, z) = 0 \end{cases}, \begin{cases} f_2(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} f_k(x, y, z) = 0 \\ g_k(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

на том же множестве.

**Пример.** Система 
$$\begin{cases} x^4 - (y + 1)^4 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

равносильна совокупности

$$\begin{cases} x^2 - (y + 1)^2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

**Замечание.** Отметим, что система 
$$\begin{cases} f_1 = f_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases}$$
 вообще говоря, не равносильна систе-

$$\text{мам: } \begin{cases} f_1 f_2 = g_1 g_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \\ \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \end{cases}$$

### Частные виды систем и их решения

а) Одно из уравнений системы является однородным.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение осуществляется с помощью подстановки в однородное уравнение системы :  
 $x=ty$ .

Иногда бывают системы, которые после преобразований приводятся к рассмотренному выше виду.

**Пример.**

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{array} \right| .$$

После применения метода линейного преобразования получим систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy - 4y^2 = 0 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}, \text{ равносильную данной, где первое уравнение является одно-}$$

родным, осуществляем подстановку  $x=ty$ .

В результате данная система окажется равносильной совокупности систем

$$\begin{cases} x = 4y \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -0,5y \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases} .$$

Ответ:  $(2; 0,5)$ ,  $(-2; -0,5)$ ,  $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}; 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ ,  $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

б) Симметрические системы с двумя неизвестными.

Решение путем введения новых неизвестных:

$$x+y=u$$

$$xy=v.$$

**Пример.**

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}.$$

Эта система является симметрической, т.к. при замене  $x$  на  $y$  получается та же система.

После преобразований система примет вид:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + xy - 2(x+y) - 1 = 0 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases} \quad \text{или после подстановки} \quad \begin{cases} u^2 + v - 2u - 1 = 0 \\ uv = 2 \end{cases}.$$

Окончательное решение представлено в таблице:

$x$	1	1	-2	$\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})$
$y$	1	-2	1	$\frac{1}{2}(1 \mp i\sqrt{7})$

в) *Кососимметрические системы с двумя неизвестными.*

При замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$  может оказаться, что знак в одном из уравнений изменится на противоположный. Решение осуществляется с помощью подстановки:

$$\begin{cases} x - y = u \\ xy = v \end{cases}.$$

Предлагается самостоятельно решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}.$$

## § 10. Иррациональные уравнения

**Определение.** Уравнение, одна или обе части которого представляют собой иррациональные выражения по отношению в некоторой неизвестной, называют иррациональным.

Алгебраические методы решения иррациональных уравнений основаны на замене данного иррационального уравнения равносильным ему рациональным уравнением или системой рациональных уравнений и неравенств. Такой прием называют исключением радикалов.

**Теорема 1.**

Если уравнение содержит только квадратные радикалы и, то их можно исключить последовательным уединением радикалов и возведением уравнения в квадрат.

**Замечание 1.** Очевидно, что полученное таким образом рациональное уравнение будет следствием данного, оно может иметь посторонние корни.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения  $f(x)=g(x)$  (1) возвести в нечетную степень, то в области действительных чисел получим новое уравнение  $(f(x))^{2k+1} = (g(x))^{2k+1}$  (2), равносильное уравнению (1).

**Теорема 3.** Если в области определения уравнения  $f(x)=g(x)$  (1) все значения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  одного знака, то возведя это уравнение в четную степень, получим новое уравнение  $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$  (2), равносильное уравнению (1).

**Пример.**

$\sqrt{8x+1} = 1 + \sqrt{5x-1}$  - в области определения уравнения, т.е. при  $x \geq \frac{1}{5}$  обе части уравнения принимают положительные значения, поэтому уравнение  $8x+1 = 1 + 2\sqrt{5x-1} + 5x-1$  является равносильным данному.

**Теорема 4.** Если в области определения уравнения  $f(x)=g(x)$  (1) функций  $f(x)$  и  $g(x)$  принимают значения различных знаков, то при возведении уравнения в четную степень получается уравнение  $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$  (2), которое является следствием уравнения (1).

**Замечание 2.** Если уравнение удовлетворяет условию теоремы 4, то его можно заменить системой, состоящей из рационального уравнения и неравенств, накладывающих такие ограничения на неизвестные, при которых обе части уравнения имеют одинаковые знаки.

**Пример.** Решить уравнение:

$\sqrt{x+2} = x-10$ , область определения  $x \geq -2$ , поэтому в области определения функция  $y=x-10$  может принимать и отрицательные значения, поэтому данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 10 \geq 0 \\ x + 2 = x^2 - 20x + 100 \end{cases} . \text{ Рациональное уравнение имеет корни 7 и 14, однако си-}$$

стеме удовлетворяет лишь  $x = 14$ .

**Замечание 3.** Конечно, можно не пользоваться приведенными выше теоремами, но тогда все полученные решения надо проверять подстановкой в данное уравнение. Такая проверка в некоторых случаях бывает, затруднительна, особенно, когда уравнение содержит параметры.

**Упражнения.**

$$1. \sqrt{x^2 + 1 + x\sqrt{x - a - 4}} - 1 = x.$$

Это уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 + x\sqrt{x - a - 4} \geq 0 \\ x^2 + 1 + x\sqrt{x - a - 4} = x^2 + 2x + 1. \end{cases}$$

Решив уравнение, входящее в эту систему, получим  $x_1 = 0$  и  $x_2 = a + 8$ .

Подставляем значения 0 и  $a+8$  в неравенства системы и убеждаемся, что при  $a \leq -4$   $x = 0$ , при  $a \geq -9$   $x = a + 8$ .

2.

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad x + a > 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} = 1 \quad x - a > 0 \quad (2)$$

$$2\sqrt{x^2 - a^2} = 1 - 2x \quad 1 - 2x \geq 0 \quad (3).$$

Решая уравнение, получим  $x = a^2 + \frac{1}{4}$ .

Подставляем это значение  $x$  в неравенства (1), (2), (3) для выяснения значений параметра.

$$a^2 + \frac{1}{4} + a > 0 \quad \text{при любом } a, \text{ кроме } a = -\frac{1}{2}.$$

$$a^2 + \frac{1}{4} - a > 0 \quad \text{при любом } a, \text{ кроме } a = \frac{1}{2}.$$

$$1 - 2(a^2 + \frac{1}{4}) \geq 0 \quad \text{при } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $x = a^2 + \frac{1}{4}$  при  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ .

$$3. \sqrt{x-a} - \sqrt{\frac{a^2}{x-a}} = \sqrt{x-2a} \quad x-a > 0 \quad (1)$$

$$x-a-|a| = \sqrt{x-a}\sqrt{x-2a} \quad x-2a \geq 0 \quad (2).$$

Если  $a > 0$ , то получаем  $x=2a$ .

Если  $a < 0$ , то уравнение не имеет решений.

Если  $a=0$ , то любое  $x > 0$  удовлетворяет уравнению.

$$4. \sqrt{a-x} = a - \sqrt{x}.$$

Ответ:  $-\frac{(a-1)^2}{4}$  при  $a \geq 1$ ;  $0$  при  $a = 0$ .

$$5. \quad 2x + 2ax + \sqrt{x} = 0.$$

Ответ: при  $a < -1$   $\left\{0; \frac{1}{4(a+1)^2}\right\}$ , при  $a \geq -1$   $x = 0$ .

## § 11. Иррациональные неравенства

1. Решить неравенство:

$$\sqrt{x+14} > x+2.$$

Данное неравенство равносильно совокупности следующих равносильных систем рациональных неравенств:

$$\begin{cases} x+14 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+14 > (x+2)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+14 \geq 0 \\ x+2 < 0. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим  $-2 \leq x < 2$ ; решив вторую систему, получим  $-14 \leq x < -2$ .

Ответ:  $x \in [-14; 2)$ .

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2 - 3y - 10} < 8 - x.$$

Заметим, что функция, стоящая в левой части неравенства, принимает в области определения неравенства только неотрицательные значения, поэтому случай, когда

правая часть отрицательна, невозможен. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ 8 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2. \end{cases}$$

Решив, получим:  $x \in (-\infty; -2] \cup [5; 5\frac{9}{13})$ .

### Упражнения для самостоятельного решения

1.  $3\sqrt{-x^2 - x + 16} > -2(2x + 1)$ .

Ответ:  $(-2; 2]$ .

2.  $\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$ .

Ответ:  $[-2; 0) \cup (2; +\infty)$ .

3.  $\sqrt{-x^2 + x + 2} + 2x - 1 > 0$ .

Ответ:  $(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}; 2]$ .

Особая трудность возникает при решении иррациональных неравенств, содержащих параметр, хотя методика решения остается прежней.

**Пример 1.** Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2 - 2ax} < 3a - x.$$

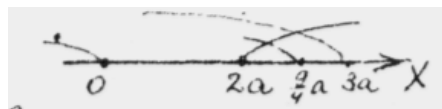
Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2ax \geq 0 \\ 3a - x \geq 0 \\ x^2 - 2ax < 9a^2 - 6ax + x^2 \end{cases} \quad \text{или после преобразований} \quad \begin{cases} x(x - 2a) \geq 0 \\ x \leq 3a \\ 4ax < 9a^2. \end{cases}$$

1)  $a=0$ , неравенство не имеет решений.

2)

$a > 0$



$$\begin{cases} x \leq 0 \text{ или } x \geq 2a \\ x \leq 3a \\ x < \frac{9}{4}a. \end{cases} \quad \text{при } a > 0 \quad x \in (-\infty; 0) \cup (2a; \frac{9}{4}a).$$

3)  $a < 0$

$$\begin{cases} x \leq 2a \text{ или } x \geq 0 \\ x \leq 3a \\ x < \frac{9}{4}a. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: при  $a \leq 0$  нет решений, при  $a > 0$   $x \in (-\infty; 0) \cup \left(2a; \frac{9}{4}a\right)$ .

**Пример 2.**

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a}.$$

Ответ: если  $a < 0$ , то  $x \in (-2a; +\infty)$ , если  $a > 0$ , то  $x \in (-a; +\infty)$ , если  $a = 0$ , то нет решения.



*Самостоятельная работа №1.*  
**Решение уравнений и их систем.**

**Вариант I**

Решите системы уравнений:

1. 
$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases};$$
2. 
$$\begin{cases} (x+1)y + x^2 - 3x - 4 = 0 \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases};$$
3. 
$$\begin{cases} 3x^2 - xy + 0,5x - y - y^2 = 15 \\ y^2 - 2x^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}x - y = -8 \end{cases};$$
4. 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7(x+y) \\ 2x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases}.$$

**Вариант II**

Решите системы уравнений:

1. 
$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2y + xy^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 = -1 \end{cases};$$
2. 
$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases};$$
3. 
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases};$$
4. 
$$\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2,5 - y \\ 6(x-y)^2 + x = 0,125 + y \end{cases}.$$

**Вариант III**

Решите системы уравнений:

1. 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases};$$
2. 
$$\begin{cases} (1-x)y + x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 2x - y^2 + 3y - 5 = 0 \end{cases};$$
3. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ x^2 - 3xy + 1,5y^2 = 1 \end{cases};$$
4. 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = x - y \\ x^2 + xy = 4y^2 - 4 \end{cases}.$$

**Вариант IV**

Решите системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x^3 - 9xy^2 = 0 \\ 3x^2 - xy + y^2 = 25 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6; \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ x + y = 5 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}.$$

**Нулевой вариант**

$$1. \begin{cases} x^2 + y^4 = 5; \\ xy^2 = 2 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 2; \\ x^2 - 3xy + 1,5y^2 = 1; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (x+1)y + x^2 - 3x - 4 = 0; \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}.$$

**Решение нулевого варианта**

$$1. \begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^4 = 9 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y^2)^2 = 9 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y^2 = 3 \\ x + y^2 = -3 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y^2 = 3 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y^2 = -3 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ:  $(1; -\sqrt{2}); (1; \sqrt{2}); (2; 1); (2; -1); (-2; -i); (-2; i); (-1; -i\sqrt{2}); (-1; i\sqrt{2})$ .

$$\begin{aligned}
2. \quad & \begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ x^2 - 3xy + 1,5y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ 2x^2 - 6xy + 3y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x - y) = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ 2x - y = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \\ y = 2x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = -2 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $(-1;0); (1;0); (-1;-2); (1;2)$ .

$$\begin{aligned}
3. \quad & \begin{cases} (x+1)y + x^2 - 3x - 4 = 0 \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases}; \\
& \begin{cases} y = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x+1} \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Первое уравнение полученной системы неравносильно первому уравнению исходной системы, так как при  $x = -1$  оно теряет смысл, в то время как для первого уравнения исходной системы все пары вида  $(-1, \alpha)$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ , являются его решениями. Возможна потеря решений. Ими могут быть лишь пары, удовлетворяющие второму уравнению системы при  $x = -1$ . Подставим значение  $(-1)$  во второе уравнение системы, получим уравнение

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Таким образом, пары чисел } (-1; 1) \text{ и } (-1; 3) \text{ являются решениями}$$

данной системы уравнений, и их мы могли бы потерять, решая методом подстановки данную систему уравнений. Продолжим решение системы (теперь уже при  $x \neq -1$ ):

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y = -\frac{(x+1)(x-4)}{x+1} \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ (-x+4)^2 - 2(-x+4) - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 - 8x + 16 + 2x - 8 - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ -2x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 5 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $(-1; 1); (-1; 3); (5; -1)$ .

$$4. \quad \begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x-y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 2(x+y) - 35 = 0 \\ (x-y)^2 + 2(x-y) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = u \\ x - y = v \\ u^2 + 2u - 35 = 0 \\ v^2 + 2v - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y = u \\ x - y = v \\ u = -7 \\ u = 5 \\ v = -3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y = -7 \\ x - y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x = -10 \\ y = -7 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = -6 \\ y = -7 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 \\ y = 5 - x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: (-5; -2); (-3;-4); (1;4); (3;2).

*Самостоятельная работа № 2.*  
**Рациональные неравенства.**

**Вариант I**

Решите неравенства:

1.  $(x^2 - 1)^3(x^2 + 2x - 3)(x^3 - 8) < 0;$
2.  $(x^4 - 16)^3(x^2 + 2x - 8)(x^2 - 5x + 4) \geq 0;$
3.  $\frac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 + 7x - 8} \geq 0;$
4.  $\frac{3x - 5}{x - 2} \geq x + 1;$
5.  $ax - a^2 < x - 1;$
6.  $a^2x - a < 25x + 5.$

**Вариант II**

Решите неравенства:

1.  $(x^2 - 4)^3(x^2 - x - 12)(x^3 + 1) \geq 0;$
2.  $(x^3 - 1)(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 9)^3 < 0;$
3.  $\frac{(x^3 - 27)(x + 3)}{x^2 + 6x + 8} \geq 0;$
4.  $\frac{(x^4 - 16)(x + 5)}{x^2 - 7x - 8} \geq 0;$
5.  $ax + 25 > a^2 - 5x;$
6.  $a^2x - 1 < a + x.$

**Вариант III**

Решите неравенства:

1.  $\frac{3x + 5}{x + 2} \geq 1 - x;$
2.  $a^2x - a < 25x + 5;$

3.  $\frac{x+4}{x+3} \geq \frac{x-2}{x-1}$ ;
4.  $a^2x+1 > a+x$ ;
5.  $(x^2-4)^3(x^2-2x-8)(x^3+125) > 0$ ;
6.  $(x^3+8)(x^2+6x+8)(x^2-9)^3 \geq 0$ .

### Вариант IV

Решите неравенства:

1.  $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^2-3x-10} \leq 0$ ;
2.  $ax+9 > a^2-3x$ ;
3.  $a^2x-a < 9x-3$ ;
4.  $(x^2-25)^3(x^2+2x-15)(x^3+64) \geq 0$ ;
5.  $(x-8)^2(x^2-4)(x-6)^3(x^2+27) > 0$ ;
6.  $\frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2-5x+6} \leq 0$ .

### Вариант V

Решите неравенства:

1.  $(x^3-1)^3(x^2-6x-7)(x+3)^4 \geq 0$ ;
2.  $(x^4-81)^3(x^2+5x+6)(x^2-x-20) < 0$ ;
3.  $\frac{(x^3-64)(x+4)}{x^2+5x+6} \leq 0$ ;
4.  $\frac{(x^3+8)(x-1)}{x^2+x-12} \leq 0$ ;
5.  $a^2x-a < 9x-3$ ;
6.  $a^2x-2 > a+4x$ .

### Нулевой вариант

Решите неравенства:

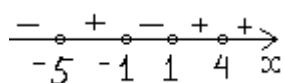
1.  $(x^3-64)(x^2+x-20)(x^2-1)^3 > 0$ ;
2.  $(x^3-27)(x^2-5x+6)(x^2-16)^3 \geq 0$ ;
3.  $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1}$ ;
4.  $\frac{(x^4-81)(x-4)}{x^2-3x-10} \leq 0$ ;
5.  $a^2x+3 < 9x+a$ ;
6.  $ax+4 > a^2-2x$ .

### Решение нулевого варианта

1.  $(x^3-64)(x^2+x-20)(x^2-1)^3 > 0$ .

Решение.

$$(x-4)(x+5)(x-4)(x-1)(x+1) > 0$$



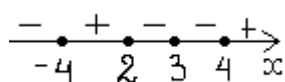
Итак,  $x \in (-5; -1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$ .

Ответ:  $(-5; -1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$ .

$$2. (x^3 - 27)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16)^3 \geq 0.$$

Решение.

$$(x-3)(x-3)(x-2)(x+4)(x+4) \geq 0$$



Итак,  $x \in [-4; 2] \cup [4; +\infty)$ .

Ответ:  $[-4; 2] \cup [4; +\infty)$ .

$$3. \frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1}.$$

Решение.

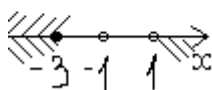
$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} \geq 0;$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 + x - 2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0;$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \geq 0;$$



$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+3 \leq 0 \\ (x-1)(x+1) > 0 \end{cases}$$

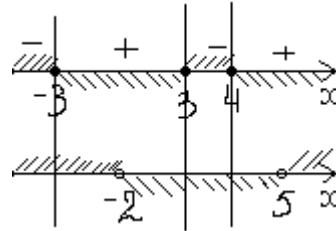


$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup (-1; 1)$ .

$$4. \frac{(x^4 - 81)(x-4)}{x^2 - 3x - 10} \leq 0.$$

Решение.



$$\begin{cases} (x+3)(x-3)(x-4) \leq 0 \\ (x+2)(x-5) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-3)(x-4) \geq 0 \\ (x+2)(x-5) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -2 < x \leq 3. \\ 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup (-2; 3] \cup [4; 5)$ .

5.  $a^2x + 3 < 9x + a$ .

Решение.

$$(a^2 - 9)x < a - 3$$

1)  $a^2 - 9 > 0$ :  $x > \frac{1}{a+3}$ , т.е.  $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ ;

2)  $a^2 - 9 < 0$ :  $x < \frac{1}{a+3}$ , т.е.  $a \in (-3; 3)$ ;

3)  $a = -3$ : решений нет;

4)  $a = 3$ : решений нет.

6.  $ax + 4 > a^2 - 2x$ .

Решение.

$$(a+2)x > a^2 - 4$$

1)  $a+2 > 0$ :  $x > a-2$ ;

2)  $a+2 < 0$ :  $x < a-2$

3)  $a = -2$ : решений нет.

*Самостоятельная работа № 3.*  
**Уравнения и неравенства с модулями.**

**Вариант I**

Решите уравнения:

1.  $|5 - 3x| = 2x + 1$ ;

2.  $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$ ;

Решите неравенства:

3.  $|2x + 5| < 7 - x$ ;

4.  $\left| \frac{x-2}{2x+5} \right| \geq -8$ .

## Вариант II

Решите уравнения:

1.  $|2x - 3| = 3 - 2x$ ;
2.  $|x - 1| + |x - 3| = 2x - 4$ ;

Решите неравенства:

3.  $|3x - 7| \leq -4$ ;
4.  $3x + |2 - x| \leq 5$ .

## Вариант III

Решите уравнения:

1.  $|7x - 1| = 2x + 4$ ;
2.  $|x + 1| + |2 - x| = |x + 3|$ ;

Решите неравенства:

3.  $|3 - 2x| \geq |4x - 9|$ ;
4.  $|3x - 4| > -5$ .

## Вариант IV

Решите уравнения:

1.  $|9x - 8| = 4x + 1$ ;
2.  $x^2 = |1 - 2x^2|$ ;

Решите неравенства:

3.  $|x - 1| > |3x - 1| - 10$ ;
4.  $\left| \frac{3x + 2}{7x - 1} \right| > -2$ .

## Вариант V

Решите уравнения:

1.  $x^2 - 7 = |3x - 7|$ ;
2.  $|2x + 5| = |x - 2|$ ;

Решите неравенства:

3.  $|x - 2| + |3 - x| > 2 + x$ ;
4.  $|6x| > 3$ .

## Нулевой вариант

Решите уравнения:

1.  $|3x - 5| = 5 - 3x$ ;
2.  $|x - 1| + |x - 2| = 1$ ;

Решите неравенства:

3.  $|2x - 5| < 1$ ;



$$4. \quad |x+2|+|x-5|>11.$$

Решение нулевого варианта

$$1. \quad |3x-5|=5-3x$$

Решение.

$$(|3x-5|=5-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 \leq 0 \\ -(3x-5)=5-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 5 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Итак,  $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$ .

Ответ:  $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$ .

$$2. \quad |x-1|+|x-2|=1$$

Решение.

Числа 1 и 2 – нули подмодульных выражений, следовательно



$$1) \ x < 1: \quad \begin{aligned} 1-x+2-x &= 1 \\ 2x &= 2 \end{aligned}$$

$x=1$  - не является корнем

$$2) \ 1 \leq x < 2: \quad x-1+2-x=1$$

$1=1$  - тождество, следовательно  $x \in [1; 2)$  - решение данного урав-

нения.

$$3) \ x \geq 2: \quad \begin{aligned} x-1+x-2 &= 1 \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$

$x=2$  - корень уравнения

Следовательно  $x \in [1; 2]$  - решение данного уравнения.

Ответ:  $[1; 2]$ .

$$3. \quad |2x-5|<1$$

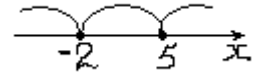
Решение.

$$(|2x-5|<1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 < 1 \\ 2x-5 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ:  $(2; 3)$ .

$$4. \quad |x+2|+|x-5|>11$$

Решение.



Числа -2 и 5 – нули подмодульных выражений, следовательно данное неравенство равносильно совокупности трех систем

Дан-

$$\begin{aligned}
 |x+2|+|x-5|>11 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2+5-x>11 \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<-8 \\ x<-2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2+5-x>11 \\ -2\leq x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7>11 \\ -2\leq x<5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2+x-5>11 \\ x\geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>14 \\ x\geq 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \\ x<-2 \\ 7>11 \\ -2\leq x<5 \\ x>7 \\ x\geq 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \\ \emptyset \\ x>7 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Итак,  $x \in (-\infty; -4) \cup (7; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (7; +\infty)$ .

*Самостоятельная работа № 4.*

**Иррациональные уравнения и неравенства.**

**Вариант I**

Решите уравнения:

1.  $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x-1}=2$ ;
2.  $\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}=3$ ;
3.  $\sqrt[4]{3-x}=\sqrt{2x}$ ;
4.  $\sqrt{x^2-3x+4}=x^2-3x+2$ ;

Решите неравенства:

5.  $\sqrt{x+10}\geq x-2$ ;
6.  $\sqrt{x^2+x-6}<x+1$ ;
7.  $(x^2-3x-4)\sqrt{3-x}<0$ ;
8.  $\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x+8}\geq 0$ .

**Вариант II**

Решите уравнения:

1.  $\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}+3=0$ ;

2.  $\sqrt{x+\sqrt{1+x}} = 1-\sqrt{x}$ ;
3.  $\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-3} = 2$ ;
4.  $\sqrt{x^2+2x-4} + \sqrt{x^2+2x+8} = 6$ ;

Решите неравенства:

5.  $\sqrt{2x-1} \geq 2-x$ ;
6.  $\sqrt{x^2+7x-8} < x+3$ ;
7.  $(x-8)\sqrt{x^2-5x-6} < 0$ ;
8.  $\frac{\sqrt{9-x}}{x^2-6x-16} \geq 0$ .

### Вариант III

Решите уравнения:

1.  $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt{x+1} = 2$ ;
2.  $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} = 10$ ;
3.  $\sqrt[4]{5-x} = \sqrt{15+x}$ ;
4.  $2\sqrt{x^2+4x-3} = x^2+4x-6$ ;

Решите неравенства:

5.  $\sqrt{8-x} \geq 2-x$ ;
6.  $\sqrt{x^2-3x-4} < x-2$ ;
7.  $(x^2-4x-5)\sqrt{3-x} < 0$ ;
8.  $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}} \geq 0$ .

### Вариант IV

Решите уравнения:

1.  $\sqrt{4+x\sqrt{x+24}} = 2+x$ ;
2.  $\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$ ;
3.  $\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-8} = 3$ ;
4.  $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$ ;

Решите неравенства:

5.  $\sqrt{3-x} \geq x-1$ ;
6.  $\sqrt{x^2+2x-15} < x-1$ ;
7.  $(x-4)\sqrt{x^2+6x-7} < 0$ ;
8.  $\frac{x^2-2x-8}{\sqrt{6-x}} \geq 0$ .

### Вариант V

Решите уравнения:

1.  $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{3x+1} = 2$ ;
2.  $\sqrt{x+5} - \sqrt[4]{x+5} = 12$ ;
3.  $\sqrt[4]{3-x} = \sqrt{x-1}$ ;

$$4. \quad 5x + 3\sqrt{x^2 - 5x + 11} = x^2 + 1;$$

Решите неравенства:

$$5. \quad \sqrt{x+4} \geq x-2;$$

$$6. \quad \sqrt{x^2 + 3x - 4} < x+1;$$

$$7. \quad (x^2 - 6x + 5)\sqrt{4-x} < 0;$$

$$8. \quad \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x+4} \geq 0.$$

Нулевой вариант

Решите уравнения:

$$1. \quad \sqrt{4+x}\sqrt{2x^2+7} - x = 2;$$

$$2. \quad \sqrt{x+3} - 2\sqrt[4]{x+3} = 8;$$

$$3. \quad \sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-5} = 2;$$

$$4. \quad \sqrt{x^2-2x+5} - x^2 = 3-2x;$$

Решите неравенства:

$$5. \quad \sqrt{5-x} \geq x+1;$$

$$6. \quad \sqrt{x^2-5x-6} < x-3;$$

$$7. \quad (x-10)\sqrt{x^2-5x-14} < 0;$$

$$8. \quad \frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x+3}} \geq 0.$$

Решение нулевого варианта

$$1. \quad \sqrt{4+x}\sqrt{2x^2+7} - x = 2.$$

Решение.

$$4+x\sqrt{2x^2+7} = x^2+4x+4;$$

$$x^2(2x^2+7) = x^4+8x^3+16x^2;$$

$$x^4-8x^3-9x^2=0;$$

$$x^2(x^2-8x-9)=0;$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=9 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ответ: -1, 0, 9.

$$2. \quad \sqrt{x+3} - 2\sqrt[4]{x+3} = 8.$$

Решение.

Пусть  $\sqrt[4]{x+3} = t, t \geq 0.$

$$t^2 + 2t - 8 = 0;$$

$t = 2$  или  $t = -4$  - не подходит.

Итак,  $\sqrt[4]{x+3} = 2;$

$$x+3=16;$$

$$x=13.$$

Ответ: 13.

$$3. \sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 5} = 2.$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + 7 + x^2 - 5 - 2\sqrt{(x^2 + 7)(x^2 - 5)} = 4 \\ x^2 - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2 = 2\sqrt{(x^2 + 7)(x^2 - 5)} \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - 35 \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 = 36 \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ответ: -3; 3.

$$4. \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x^2 = 3 - 2x.$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 3)^2 \\ x^2 - 2x + 5 \geq 0, x \in R \end{cases}$$

Пусть  $x^2 - 2x + 3 = t$

$$t^2 - t - 2 = 0;$$

$$t = -1$$

ИЛИ

$$t = 2$$

Итак,

$$x^2 - 2x + 3 = -1$$

ИЛИ

$$x^2 - 2x + 3 = 2$$

нет корней

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = -1.$$

Ответ: -1.

$$5. \sqrt{5-x} \geq x+1.$$

Решение.

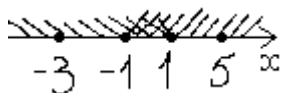
$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 5 - x \geq x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 3x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Ответ:  $[-1;1]$ .



6.  $\sqrt{x^2 - 5x - 6} < x - 3$ .

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x - 6 < x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 6 \\ x \geq 3 \\ x < 15 \end{cases}$$



$$6 \leq x < 15$$

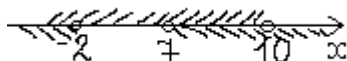
Ответ:  $[6;15)$

7.  $(x-10)\sqrt{x^2 - 5x - 14} < 0$ .

Решение.

$$\begin{cases} x - 10 < 0 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x < -2 \\ x > 7 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -2 \\ 7 < x < 10 \end{cases}$$

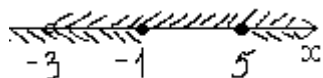
Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (7; 10)$ .

$$8. \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x+3}} \geq 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -3 < x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Ответ:  $(-3; -1] \cup [5; +\infty)$ .

### Самостоятельная работа № 5.

### Иррациональные уравнения и неравенства.

#### Вариант I

Решите уравнения:

$$1. \sqrt{x+4} - \frac{1}{2}x = 2;$$

$$2. \sqrt{4-6x-x^2} = x+4;$$

Решите неравенства:

$$3. \sqrt{x+5} \geq 1-x;$$

$$4. x > \sqrt{24-5x}.$$

#### Вариант II

Решите уравнения:

$$1. \sqrt{4+2x-x^2} + 2 = x;$$

$$2. \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7;$$

Решите неравенства:

$$3. \sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x;$$

$$4. \sqrt{x^2+x-12} < x.$$

#### Вариант III

Решите уравнения:

$$1. 2 + \sqrt{9x^2+2x-3} = 3x;$$

$$2. \sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8;$$

Решите неравенства:

$$3. \sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x;$$

4.  $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} < 31.$

### Вариант IV

Решите уравнения:

1.  $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3;$

2.  $2\sqrt{1 - x^2} = x - 2;$

Решите неравенства:

3.  $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3;$

4.  $\sqrt{(x + 2)(x - 5)} > 8 - x.$

### Вариант V

Решите уравнения:

1.  $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0;$

2.  $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x + 2};$

Решите неравенства:

3.  $\sqrt{24 - 10x} > 3 - 4x;$

4.  $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} < x + 1.$

### Вариант VI

Решите уравнения:

1.  $\sqrt{x + 16} - x + 4 = 0;$

2.  $\frac{3x - 2}{\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{(2x - 1)^3};$

Решите неравенства:

3.  $\sqrt{17 - 4x} + \sqrt{x - 5} \leq \sqrt{13x + 1};$

4.  $\sqrt{\frac{2x - 1}{x + 2}} - \sqrt{\frac{x + 2}{2x - 1}} \geq \frac{7}{12}.$

### Нулевой вариант

Решите уравнения:

1.  $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1;$

2.  $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{2x + 3} = \sqrt{3x + 4};$

Решите неравенства:

3.  $\sqrt{x + 2} - \sqrt{5x} > 4x - 2;$

4.  $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}.$

### Решение нулевого варианта

1.  $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$



Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 + 5x + 8 \geq 0 \\ 3x^2 + 5x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Пусть  $3x^2 + 5x + 1 = t$ , тогда  $3x^2 + 5x + 8 = t + 7$ , а уравнение примет вид:

$$\sqrt{t+7} - \sqrt{t} = 1, \text{ где } t \geq 0$$

$$(\sqrt{t+7} = 1 + \sqrt{t}) \Leftrightarrow \begin{cases} t+7 = 12\sqrt{t} + t \\ 1 + \sqrt{t} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{t} = 6 \\ \sqrt{t} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t} = 3 \\ \sqrt{t} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t} = 3 \Leftrightarrow t = 9$$

Возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$3x^2 + 5x + 1 = 9$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$D = 25 + 96 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 11}{6}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{8}{3}$$

Проверкой убеждаемся, что эти числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ:  $-\frac{8}{3}; 1$ .

$$2. \quad \sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{5} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

При  $x \geq -\frac{4}{3}$  левая часть и правая являются положительными числами.

$$\sqrt{5x+7} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+3}$$

$$5x+7 = 3x+4 + 2x+3 + 2\sqrt{3x+4} \cdot \sqrt{2x+3}$$

$$\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{3x+4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{4}{3}$$

$x_1$  - посторонний корень.

Ответ:  $-\frac{4}{3}$ .

$$3. \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x - 2$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Так как  $(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x})$  при  $x \geq 0$  - неотрицательно, то

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{5x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}) > (4x - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x})$$

$$(x+2-5x) > (4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x})$$

$$2-4x > (4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x})$$

$$(4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x} + 1) < 0$$

$4x-2 < 0$ , так как сумма трех положительных чисел больше нуля

$$x < \frac{1}{2}, \text{ так как } x \geq 0, \text{ то } 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left[ 0; \frac{1}{2} \right).$$

$$4. \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$$

Решение.

$$\left( \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{4}{x^2} - \frac{3}{4} \geq 0 \\ \frac{4}{x^2} - \frac{3}{4} < \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7-x}{2x} > 0 \\ \frac{16-3x^2}{4x^2} \geq 0 \\ \frac{4}{x^2} - \frac{3}{4} < \frac{4}{x^2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{x} < 0 \\ \frac{3x^2-16}{x^2} \leq 0 \\ \frac{2}{x} - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ \frac{(x\sqrt{3}-4)(x\sqrt{3}+4)}{x^2} \leq 0 \\ \frac{2-x}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ответ: } 2 < x \leq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ

- §1. Определение уравнения, его решения, теоремы о равносильности уравнений
- §2. Целые алгебраические уравнения
- §3. Дробные алгебраические уравнения
- §4. Алгебраические нетождественные неравенства
- §5. Целые алгебраические неравенства выше второй степени
- §6. Дробные рациональные неравенства
- §7. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля
- §8. Задачи, решаемые с помощью составления уравнений и неравенств
- §9. Системы и совокупности уравнений и неравенств
- §10. Иррациональные уравнения
- §11. Иррациональные неравенства

**Э.М Булатова**

**Элементарная математика с точки зрения высшего математики**

План университета 2023 г.

*Редактор*

Н.В. Ефрюкова

*Компьютерная верстка*

С.А. Бостанова

**Подписано в печать**  
**Формат 60x84/16. Бумага газетная.**  
**Объем 0,8 усл. печ. л.**  
**Тираж 100 экз.**

**Издательство Карачаево-Черкесского  
государственного университета:  
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 29  
ЛР № 040310 от 21.10. 1997.**

**Набрано и отпечатано в типографии  
Карачаево-Черкесского государственного  
университета:  
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 46**